D M I
AP2: Deuxième Année Cycle Préparatoire
Analyse 3: Espace Métrique

ENSA d'Al-Hoceima
Année 2020/2021
S 3

Correction de Série n°1

– Espace mètrique –

Exercice 3

Soit $d_1, d_2, ..., d_n : E \times E \to [0, \infty[$ des semi-distances sur E.

1°) Montrer que $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$ et $d^{'} = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ sont des semi-distances.

2°) Soit $d : E \times E \to [0, \infty[$ une semi-distance sur E et $\alpha : E^{'} \to E$ quelconque. Montrer que $d^{'}$ définie par $d^{'}(x^{'}, y^{'}) = d(\alpha(x^{'}), \alpha(y^{'}))$ est une semi-distance sur $E^{'}$.

correction 3

1°) Pour montrer que d est une semi-distance il faut vérifier que

i) Si $x = y$ alors $d(x, y) = 0$.

ii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in E$.

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in E$.

Montrons que $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$ et $d^{'} = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ sont des semi-distances.

Pour $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$
comme d_i une semi-distance sur E pour $1 \leq i \leq n$
Alors

i) Si $x = y$ alors $d_i(x, y) = 0$ donc $d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x, y) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$
Donc Si $x = y$ alors $d(x, y) = 0$.

ii) Pour $1 \leq i \leq n$ on a $d_i(x, y) = d_i(y, x), \forall x, y \in E$
donc $\sum_{i=1}^{n} d_i(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(y, x), \forall x, y \in E$
Alors $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in E$.

iii) On écrit

$$d(x, z) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x, z) \leq \sum_{i=1}^{n} (d_i(x, y) + d_i(y, z)) \leq \sum_{i=1}^{n} d_i(x, y) + \sum_{i=1}^{n} d_i(y, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

Alors $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in E$.

Pour $d^{'} = \max_{1 \leq i \leq n} d_i, \forall 1 \leq i \leq n$

i) Evident

ii) Evident

iii) comme $d^{'} = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ est une semi -distance sur E, alors $\exists 1 \leq j \leq n$ telque $d^{'}(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x, y) = d_j(x, y)$
on a d_j est une semi -distance sur E alors $\forall x, y, z \in E; d_j(x, z) \leq d_j(x, y) + d_j(y, z)$
d'ou $d^{'}(x, z) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x, z) = d_j(x, z) \leq d_j(x, y) + d_j(y, z) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x, y) + \max_{1 \leq i \leq n} d_i(y, z)$
alors $d^{'}(x, z) \leq d^{'}(x, y) + d^{'}(y, z)$

2°) On a

i) Si $x^{'} = y^{'}$ alors $\alpha(x^{'}) = \alpha(y^{'})$ d'où $d(\alpha(x^{'}), \alpha(y^{'})) = d^{'}(x^{'}, y^{'}) = 0$

ii) $d^{'}(x^{'}, y^{'}) = d(\alpha(x^{'}), \alpha(y^{'})) = d(\alpha(y^{'}), \alpha(x^{'})) = d^{'}(y^{'}, x^{'})$ car d est une semi-distance.

iii) On écrit

$$d^{'}(x^{'}, z^{'}) = d(\alpha(x^{'}), \alpha(z^{'})) \leq d(\alpha(x^{'}), \alpha(y^{'})) + d(\alpha(y^{'}), \alpha(z^{'})) = d^{'}(x^{'}, y^{'}) + d^{'}(y^{'}, z^{'})$$

Exercice 4
Soit $X =]0, +\infty[$ pour $x, y \in X$, on note

$$d(x,y) = \mid \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid$$

1°) Montrer que d est une distance sur X.

2°) L'espace métrique (X, d) est-il complet?

correction 4
1°) Soit $X =]0, +\infty[$ pour $x, y \in X$, $\quad d(x,y) = \mid \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid$

On montre que d est une distance sur X.

pour tout $x, y, z \in X$, on a

i)

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mid \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

ii) $d(x,y) = \mid \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid = \mid \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \mid = d(y,x)$

iii) $d(x,z) = \mid \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \mid = \mid (\frac{1}{x} - \frac{1}{y}) + (\frac{1}{y} - \frac{1}{z}) \mid \leq \mid \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid + \mid \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \mid = d(x,y) + d(y,z)$

donc d est une distance sur X.

2°) L'espace (X, d) est donc un espace métrique, il n'est pas complet, car:
Dans (X, d), prenons la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ par $U_n = n$ est de Cauchy car $d(U_n, U_m) = \mid \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid$ tend vers 0 lors que n et m tendent vers ∞, il est clair que cette suite ne converge pas dans (X, d) (elle n'est pas bornée), donc elle ne converge pas dans $(]0, +\infty[, d)$. Ainssi l'espace métrique $(]0, +\infty[, d)$ n'est pas complet.

Exercice 5
Montrer que:

1°) On a $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$

2°) $x \in A^\circ \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$

3°) $x \in \overline{A}, \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \mathcal{O}$

4°) A ouvert $\Leftrightarrow A = A^\circ$

5°) A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

6°) A ouvert $\Leftrightarrow A$ est une union de boules ouvertes.

correction 5
1°) On montre que $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$

i) Si $A \subset B$ tous les ouverts contenus dans A sont contenus dans B.
En particulier A° est un ouvert contenu dans B donc $A^\circ \subset B^\circ$.

ii) On supose que $A \subset B$ et $x \in \overline{A}$, Donc il existe une suite d'élément de A (donc de B) qui converge vers x ,Donc $x \in \overline{B}$ alors en deduire que $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2°) $x \in A^\circ \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A$
$\Rightarrow$ Si $x \in A^\circ$ comme A° est ouvert, par définition d'un ouvert il exixte $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A^\circ$.

$\Leftarrow$ S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A$ comme $B(x,\varepsilon)$ est ouvert,
on a $B(x,\varepsilon) \subset \{\cup\vartheta : \vartheta \quad \text{ouvert et} \quad \vartheta \subset A\} = A^\circ$.

3°) $x \in \overline{A}, \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \mathcal{O}$

$\Rightarrow$ Soit $x \in \overline{A}$ et $\varepsilon > 0$. Montrons que $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Par l'absurde si $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ alors $B(x,\varepsilon) \subset \complement_E A$.
Comme $B(x,\varepsilon)$ est ouvert $\Rightarrow B(x,\varepsilon)$ est dans l'intérieur de $\complement_E A$ qui est égal à $\complement_E \overline{A}$.
Par suite $x \in \complement_E \overline{A}$ ce qui contredit l'hypothése que $x \in \overline{A}$. On a ainsi prouvé que $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\Leftarrow$ Supposons que $\forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ et montrons alors que $x \in \overline{A}$. Par l'absurde suppoons que $x \notin \overline{A}$.
Alors $x \in \complement_E \overline{A}$ et puisque $\complement_E \overline{A}$ est ouvert $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $B(x,\varepsilon_0) \subset \complement_E \overline{A}$.
On a donc $B(x,\varepsilon_0) \cap \overline{A} = \emptyset$. Mais $A \subset \overline{A}$ donc $B(x,\varepsilon_0) \cap A = \emptyset$. Cette contradiction montre alors que notre hypothése était fausse et donc que $x \in \overline{A}$.

4° et 5°) A ouvert $\Leftrightarrow A = A^\circ$ et A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

- Par définition on a $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$

- Si $A \subset A^\circ$ alors A est contenu dans le plus grand ouvert qui'il contient, il est donc égal à cet ouvert donc est ouvert.
- Si A est ouvert, il est bien le plus grand ouvert qu'il contient.
Alors $A \subset A^\circ$
Donc A ouvert $\Leftrightarrow A = A^\circ$
- Si A est fermé, il est le plus petit fermé qui le contient ($\overline{A} \subset A$).
- Réciproquement, s'il est le plus petit fermé qiu le contient il est fermé.
Donc $A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ est fermé

6° A ouvert $\Leftrightarrow A$ est une union de boules ouvertes.

A ouvert $\Leftrightarrow A = A^\circ$
il suffit de montrer que $A^\circ = \cup\theta_i$ tel que $\theta_i \subset A$.

$$\begin{aligned} x \in A^\circ \quad &\Leftrightarrow \quad A \in \vartheta(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists i \in I \quad \text{tel que } x \in \theta_i \subset A \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \cup_{i \in I}\theta_i. \end{aligned}$$

Alors A ouvert $\Leftrightarrow A$ est une union de boules ouvertes.